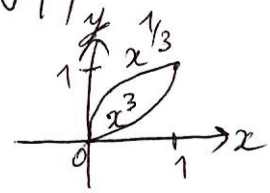
27-2-2026 COMPLEMENTI



Proviamo che

(*) se $0 \leq x \leq 1$, allora $x^3 \leq x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Innanzi tutto notiamo che, siccome $0 \leq x \leq 1$, allora $x^{\frac{1}{3}} \geq 0$ ed è $x^{\frac{1}{3}} = 0$ se e solo se $x = 0$. Se $x = 0$, o $x = 1$, l'asserto (*) è banale. Sia allora $x \neq 0, x \neq 1$: notiamo che $\boxed{x > 0}$, e quindi anche $x^{\frac{1}{3}} > 0$.. Allora

$x^3 \leq x^{\frac{1}{3}}$ se e solo se $\dfrac{x^3}{x^{1/3}} \leq \dfrac{x^{1/3}}{x^{1/3}} = 1$

se e solo se $x^{3-\frac{1}{3}} \leq 1 = x^0$ se e solo se $3 - \frac{1}{3} \geq 0$

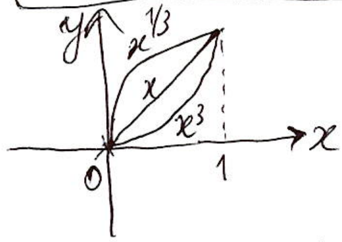
in quanto la base è compresa fra 0 e 1, estremi esclusi, ma $3 - \frac{1}{3} \geq 0$ se e solo se $\frac{9-1}{3} = \frac{8}{3} \geq 0$

è sempre vero, e quindi è sempre vero che $x^3 \leq x^{1/3}$ (sotto l'ipotesi $0 \leq x \leq 1$, perché abbiamo detto che sono compresi tutti e tre i casi: $0 < x < 1$, $x = 0$, $x = 1$)

Pertanto la proprietà (*) è dimostrata.

Proviamo che

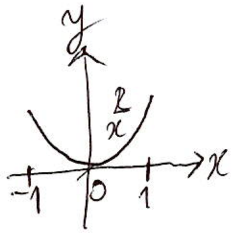
(*) se $0 \le x \le 1$, allora $x^3 \le x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$



Innanzi tutto dimostriamo che

a) se $0 \le x \le 1$, allora $x^3 \le x$

Notiamo che, se $0 \le x \le 1$, allora $x^2 \le 1$.



Moltiplicando per x, che è positivo o nullo, si ottiene $x \cdot x^2 \le x$, cioè $x^3 \le x$. Quindi a) è provato.

Adesso dimostriamo che

b) se $0 \le x \le 1$, allora $x \le x^{\frac{1}{3}}$

Da a) e b) seguirà che, se $0 \le x \le 1$, allora

$\boxed{x^3} \le x \le \boxed{x^{\frac{1}{3}}}$, cioè l'asserto (*).

Siccome $0 \le x \le 1$, allora $0 = 0^{\frac{1}{3}} \le x^{\frac{1}{3}} \le 1^{\frac{1}{3}} = 1$, cioè (ponendo $w = x^{1/3}$) $0 \le w \le 1$. Quindi la quantità w soddisfa le ipotesi della disequazione a), e quindi soddisferà anche la tesi di a), cioè $w^3 \le w$. Ma, siccome $w = x^{1/3}$, allora $x = (x^{1/3})^3 = w^3$. Tenendo conto che $w = x^{1/3}$ ed $x = w^3$, da $w^3 \le w$ otteniamo $x \le x^{1/3}$, cioè l'asserto di b).